Université Pierre et Marie Curie
(Master des Sciences et Technologies)

avec la participation
de l'Université de Picardie Jules Verne,
de l'Université de Versailles-Saint-Quentin
de l'École Normale Supérieure et de l'École Polytechnique

Mathématiques et Applications
(Spécialité Mathématiques Fondamentales)

M2 Algèbre et Géométrie 2006-2007

Responsable de la formation
JAN NEKOVAR
e-mail : nekovar@math.jussieu.fr
175, rue du Chevaleret, 75013 Paris
Bureau 7A43
tél. : 01 44 27 72 83

Secrétariat
Laurence Dreyfuss
e-mail : deama@math.jussieu.fr
Bureau 1D15
tél. & fax. : 01 44 27 85 45
lundi, mardi, jeudi : 9h15-17h00

Correspondance :
Laurence Dreyfuss,
Secrétariat du M2 "Algèbre et Géométrie"
Université Paris 6,
175, rue du Chevaleret, F-75013 Paris

Laboratoire d'accueil :
Institut de Mathématiques de Jussieu
(UMR 7586)
175, rue du Chevaleret, 75013 Paris

http ://www.math.jussieu.fr/m2/aa/

TABLE DES MATIÈRES

Liste des Cours

Programme provisoire (21 mars 2007)

Les emplois du temps seront disponibles sur le Web dès le mois de septembre

Cours d'introduction

Cours avec quatre options de 24h, du 18 septembre au 27 octobre 2006

Nikita KARPENKO	Courbes algébriques et surfaces de Riemann
Daniel BERTRAND$^{\diamond}$	Introduction à la théorie algébrique des nombres
Patrick POLO$^{\diamond}$	Introduction aux groupes et algèbres de Lie
Pierre SCHAPIRA$^{\diamond}$	Catégories, sites et champs

Cours fondamentaux

Cours de 2 × (24h + 12h TD) ; du 6 Nov. au 15 Déc. 06, et du 8 Janv. au 16 Fév. 07

Claire VOISIN (+ TD Matthieu ROMAGNY)	Géométrie algébrique I
Claire VOISIN (+ TD Nicolas PERRIN)	Géométrie algébrique II
Pierre COLMEZ (+ TD Jan NEKOVÁŘ)$^{x\diamond}$	Nombres p-adiques et fonctions L (TN1)
Marie-France VIGNERAS (+ TD Pascal BOYER)$^{\underline{7}}$	Fonctions L de formes modulaires (TN2)
Patrick POLO (+ TD Nicolas PERRIN)$^{\diamond}$	Groupes algébriques et groupes de Lie I
Nicolas BERGERON$^{\diamond}$(+ TD Nicolas Bergeron)	Groupes algébriques et groupes de Lie II

Cours spécialisés

Cours de 24h, du 5 Mars au 13 Avril 2007⋆

Nikita KARPENKO	Cycles algébriques avec applications aux formes quadratiques
Marie-France VIGNERAS$^{\underline{7}}$	Fonctions L et représentations p-adiques
Damian RÖSSLER	Introduction à la théorie des modèles entiers des courbes
Kai BEHREND, Andrew KRESCH^{i}	Introduction to Stacks
Nicolas BERGERON$^{\diamond \mathrm{an}}$	Spectre des surfaces hyperboliques

$\underline{7}$: *cours commun avec le M2 de Paris 7,* ^{x} : *cours commun avec le M2 de l'Ecole Polytechnique* ^{i} : *cours à l'Institut Henri Poincaré,* $^{\mathrm{an}}$: *cours commun avec le M2 analyse et géométrie,* ⋆ : *sous réserve du calendrier de l'Université,* $^{\diamond}$: *ce cours est également proposé en télé-enseignement.*

Objectifs du M2 “Algèbre et géométrie”

Ce M2 prend, dans le cadre de la réforme européenne LMD, la suite du DEA “Méthodes algébriques”.

Le langage algébrique est un outil puissant permettant de formuler et de résoudre des problèmes dont le cadre échappe souvent au domaine traditionnel que l’on appelait jadis “algèbre”. A côté de la géométrie algébrique et la théorie des nombres, dont il est issu, la théorie des représentations (théories de Lie), l’analyse linéaire (l’étude des systèmes d’équations aux dérivées partielles), la topologie algébrique, ou encore le calcul formel, utilisent de plus en plus ce langage algébrique et l’enrichissent, lui ouvrant de nouvelles sources d’inspiration, et de nouveaux champs d’applications.

Débouchés
La recherche et l’enseignement supérieur offrent, comme pour tout M2 de mathématiques pures, des perspectives de carrière attractives aux étudiants. A côté de ces débouchés traditionnels, il faut noter que certains secteurs industriels ont besoin de spécialistes des techniques algébriques enseignées dans ce M2 : calcul formel, théorie des codes, etc. Le M2 s’appuie sur l’École doctorale pour aider les étudiants dans la recherche de tels débouchés.

Organisation du M2, modalités d’inscription, télé-enseignement

Cursus prérequis
Le M2 s’adresse aux étudiants titulaires du M1 (anciennement maîtrise) de mathématiques ou d’un titre équivalent.

Modalités d’inscription
La sélection des candidats se fait sur dossier. Les étudiants intéressés enverront leur candidature au secrétariat du M2 pendant (ou à la fin) du semestre précédent leur entrée en M2. On conseille tout particulièrement aux étudiants étrangers de candidater avant le 30 Juin. Le dossier de candidature est composé de

(1) la page "Fiche de suivi ..." à télécharger depuis le site de l’Université : *www.etu.upmc.fr/scol_licence.htm#master* (suivre les liens dans le paragraphe "ACTE DE CANDIDATURE AU GRADE MASTER") et les documents qui y apparaissent. Le même site permet également de suivre l’état d’avancement de son dossier.

(2) un formulaire de candidature (= dossier spécifiques), à remplir par tous les étudiants (qu’ils viennent ou non de Paris 6), et téléchargeable depuis le site électronique du M2 Mathématiques Fondamentales :
www.math.jussieu.fr/m2/accueil/

Une fois leur candidature agréée, le secrétariat du M2 indiquera aux étudiants la marche à suivre pour finaliser leurs inscriptions administrative et pédagogique.

La maquette des cours de l’année suivante paraît sur le site Web du M2 vers la mi-Mai. Une réunion de présentation du M2 a lieu à la fin Juin, en coordination avec les autres M2 attachés à l’École doctorale ‘Sciences mathématiques’ de Paris-Centre.

Organisation annuelle du M2
Le cursus du M2 est composé de cours, et de travaux personnels.

Les cours sont donnés suivant un rythme de 4 vagues de 6 semaines, regroupées de la façon suivante :

– cours d’introduction avec quatre options de 24 heures sur 6 semaines, avec un examen commun (9 ECTS) ; les étudiants devront suivre au moins deux de ces options.

– cours fondamentaux, de 48 heures (+ 24h de TDs), sur 2×6 semaines, chaque partie de 6 semaines donnant lieu à un examen valant 9 ECTS.

– cours spécialisés, en général de 24h sur 6 semaines, avec examen (9 ECTS). Certains des cours de l’École doctorale sont également ouverts aux étudiants du M2.

Le travail personnel consiste en

– un stage, conclu par la rédaction d’un mémoire, et une soutenance devant un jury ; il donne lieu à 30 ECTS (voir la rubrique “Stage de M2” ci-dessous).

Les examens ont lieu à la fin de l’enseignement concerné. Une session de rattrapage est prévue (en Septembre pour les cours spécialisés, en Juin ou en Septembre pour les cours d’introduction et fondamentaux). Les dates de soutenance de mémoires sont fixées en accord avec le jury.

Contrôle des connaissances
Les étudiants devront acquérir 27 ECTS de cours, dont au plus 9 en cours spécialisés, 3 ECTS d’activités générales (maniement du TeX et de l’anglais scientifique), et 30 ECTS de travail personnel.

Des crédits de cours peuvent être obtenue dans une autre université parisienne, après accord du directeur du M2. Cet accord est automatique pour le M2 de Mathématiques de l'Université de Paris 7, et pour le M2 de Mathématiques pures de l'Université d'Orsay.

Télé-enseignement

Une possibilité d'enseignement par correspondance est ouverte sur certains cours (voir plaquette de l'année concernée). Les étudiants par correspondance reçoivent les polycopiés des cours, passent les examens à l'Université, et correspondent directement avec les enseignants (resp. leur directeur de stage) pour les questions pédagogiques (resp. la préparation de leur mémoire).

Le M2 participe à divers programmes de cyber-université (programme Télé-sciences de Paris 6, projet Ficus du MEN, coopération avec Brown University,...). Plusieurs cours sont dès à présent accessibles sur le site Web du M2 : `www.math.jussieu.fr/m2/aa/`

Allocations d'études en M2

Les étudiants français ou de l'UE, ou les étudiants titulaires d'une maîtrise française, désirant une bourse durant leur année de M2 doivent s'adresser au service des bourses, bureau de Scolarité de l'Université Paris 6 (campus de Jussieu). Les retraits des dossiers s'effectuent en Septembre (bourses sur critères académiques).

Pour les candidatures aux bourses sur critères sociaux, s'inscrire, entre Janvier et Avril de l'année précédent le M2, sur le site du CNOUS : `www.cnous.fr/_vie_15.htm`

Bourses de thèse

À l'issue du M2, des allocations de recherches du MEN sont proposées sur concours au sein de l'École doctorale pour les candidats admis à continuer en thèse. Ce concours est également ouvert aux normaliens et aux polytechniciens, mais ceux-ci doivent commencer par candidater à une allocation couplée (AC, AMX).

Les candidats aux bourses de thèse doivent se faire connaître du directeur du M2 et du secrétariat au début du 2e semestre de leur année de M2. Les actes de candidature proprement dits sont déposés en Juin auprès du secrétariat de l'École doctorale, et doivent être accompagnées d'un rapport du futur directeur de recherches.

Même si une deuxième session d'allocation a lieu en septembre, le classement est dans la pratique effectué par l'École doctorale début Juillet. Les candidats à cette allocation devraient donc avoir achevé leur M2, stage compris, à la session de juin. Par ailleurs, l'allocation de recherche ne peut être attribuée que l'année même d'obtention du M2 (sauf dérogation pour stage pratique de l'Agrégation). Toute autre demande de dérogation nécessitera une recommandation expresse du futur directeur de recherches. L'étudiant ne doit néanmoins pas avoir été déjà inscrit en thèse.

Contenu scientifique du M2

Les enseignements

Le M2 est organisé en trois filières scientifiques : Géométrie Algébrique, Théorie des Nombres, Théories de Lie Algébriques. Une quatrième filière, portant sur les méthodes effectives liées à ces trois thèmes, est organisée en liaison avec le M2 "Math-Info" de Paris 6 et les enseignements d'Algèbre du M de Versailles.

La plupart des cours sont organisés conjointement avec le M2 de Mathématiques de Paris 7.

Les filières ont pour but de faciliter la lisibilité du M2, mais ne sont pas étanches. Il est au contraire recommandé aux étudiants d'élargir leur culture générale en suivant des cours de différentes filières.

Les cours d'introduction ont une double fonction : faire le point en complétant les connaissances du M1 nécessaires pour la suite, et introduire de nouveaux outils communs à différentes filières. Un polycopié est distribué dans chacun de ces cours.

Les cours fondamentaux présentent les concepts et les outils de base de chacune des filières. On recommande aux étudiants de suivre deux cours.

Les cours spécialisés demandent un grand travail personnel. À noter que des cours spécialisés peuvent avoir lieu à Amiens, Versailles, à l'École Polytechnique, à l'ENS ou à l'Institut Henri Poincaré.

Les cours de l'École doctorale s'adressent aux doctorants et aux enseignants-chercheurs, mais pourront être suivis par des étudiants du M2 particulièrement motivés, et donner lieu, s'ils le demandent, à un examen (équivalent à un cours spécialisé).

Enfin, les étudiants ont accès aux stages ou écoles organisées dans divers centres européens : Luminy (stages de M2 intensifs), Utrecht (Spring/Summer schools), Bellaterra, etc, pour lesquels ils peuvent déposer des demandes de soutien financier auprès du M2.

Le stage de M2.

Il consiste en un mémoire écrit (sous forme d'un fichier TeX) et préparé sous la responsabilité d'un enseignant. Sa soutenance a lieu devant un jury comprenant au moins le directeur du stage et un représentant du responsable de la filière..

Il s'agit d'une analyse et/ou d'une synthèse d'articles de recherche récents. L'étudiant doit faire preuve de ses capacités de compréhension, de rédaction et d'exposition.

L'étudiant doit contacter un enseignant-chercheur du M2, qui accepte de devenir son directeur de mémoire. Il n'est absolument pas nécessaire que celui-ci enseigne dans le M2 cette année : tous les membres habilités des projets de recherches liés au M2 sont incités à assurer ces tâches d'encadrement. Le directeur de stage devenant souvent le directeur de thèse, il s'agit là d'un choix très important pour les étudiants qui comptent poursuivre en recherche. L'idéal est d'obtenir l'accord du directeur de stage en janvier ou février.

Équipes d'enseignement et d'encadrement

La principale unité de recherche sur laquelle s'appuie le M2 est l'Institut de Mathématiques de Jussieu-Chevaleret, UMR 7586 du CNRS, en particulier ses projets : 'Analyse algébrique' (dir. P. Schapira) ; 'Théorie des nombres' (dir. L. Merel) ; 'Algèbres d'opérateurs' (dir. G. Skandalis).

Unités de recherche liées à nos cohabilitations et conventions : laboratoires LAMFA (Amiens), LAMA (Versailles), GAGE (École polytechnique), DMA (ENS Ulm).

[Les listes qui suivent ne sont pas exhaustive.]

Géométrie Algébrique (coordinateur : F. Loeser)
Y. Laszlo (Pr X), E. Leichtnam (DR P6), F. Loeser (Pr P6), S. Lysenko (MC P6), C. Peskine (Pr P6), V. Maillot (CR, P7), C. Mourougane (MC P6), N. Perrin (MC P6), J.-J. Risler (Pr P6), P. Schapira (Pr P6), C. Voisin (DR P6), N. Karpenko (Pr P6), V. Cossart (Pr Versailles), L. Gruson (Pr Versailles), M. Romagny (MC P6), D. Roessler (CR P7).

Théorie des Nombres (coordinateur : J. Oesterlé)
J. Oesterlé (Pr P6), Y. André (DR ENS), M.-J. Bertin (Pr P6), J. Nekovář (Pr P6), D. Bertrand (Pr P6), N. Karpenko (Pr P6), P. Colmez (Pr X), S. David (Pr P6), R. de la Bretêche (Pr P7), M.-F. Vigneras (Pr P7), M. Harris (Pr P7), A. Kraus (MC P6), L. Merel (Pr P7), O. Lecacheux (MC P6), P. Philippon (DR P7), M. Waldschmidt (Pr P6).

Théorie de Lie algébrique (coordinateur : P. Polo)
P. Polo (Pr P6), N. Bergeron (Pr P6), F. Digne (Pr Amiens), J-Y. Hée (Pr Amiens), J. Michel (DR Amiens), R. Rentschler (DR P6), R. Rouquier (DR P7), M. Vergne (DR X), M. Andler (Pr Versailles), M. Rosso (Pr ENS), M. Varagnolo (MC Cergy), E. Vasserot (Pr P7).

Méthodes algébriques effectives (coordinatrice : D. Lebrigand)
D. Lebrigand (MC P6), M. Chardin (CR P6), M. Giusti (DR X), L. Koelblen (MC P6), P.-V. Koseleff (MC P6), M. Deschamps (DR Versailles).

Abréviations : Pr : Professeur ; MC : Maître de Conférences ; CR : Chargé de recherches CNRS ; DR : Directeur de recherches CNRS ; ENS : École Normale Supérieure ; P6 : Université Pierre et Marie Curie ; P7 : Université Denis Diderot ; P12 : Université de Paris Val-de-Marne ; Cergy : Université de Cergy-Pontoise ; Amiens : Université de Picardie ; Versailles : Université de Versailles Saint-Quentin ; X : École Polytechnique.

Cohabilitations et conventions
LAMFA, Université de Picardie-Jules Verne : 33, Rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex ; fax : 03 22 82 75 02. Site Web du M2 : *www.mathinfo.u-picardie.fr/digne/M2alg.html*
Coordinateur : F. Digne mèl : `digne@u-picardie.fr`, tél. : 03 22 82 75 13.
École doctorale de rattachement : ED en sciences et santé (Université Jules Verne).

LAMA, EP 1755, Université de Versailles-St-Quentin : Bât. Fermat, 45, av. des États-Unis, 78035 Versailles Cedex ; 01 39 25 46 46 ; Site Web du LAMA : `www.math.uvsq.fr/ma2/` Coordinateur : V. Cossart mèl : `cossart@math.uvsq.fr`, tél. : 01 39 25 46 48, secr. 01 39 25 46 46.
École doctorale de rattachement : ED SOFT, numéro 20001745.

GAGE, École polytechnique Plateau de Palaiseau, 91 128 Palaiseau Cedex
Responsable : M. Giusti mèl : `giusti@gage.polytechnique.fr`

DMA de l'ENS Ulm École normale supérieure, 45, Rue d'Ulm, 75 230 Paris Cedex 05.
Responsable : M. Rosso mèl : `rosso@dmi.ens.fr`

Cette brochure ainsi que sa version électronique a été réalisée par Pierre-Vincent Koseleff[1].

[1] e-mail : `koseleff@math.jussieu.fr`

CONTENU DES COURS

COURS D'INTRODUCTION

Cours avec quatre options de 24h, du 18 Septembre au 27 Octobre 2006

Nikita KARPENKO[2] : **Courbes algébriques et surfaces de Riemann**

Résumé :
Ce cours est une introduction aux objets et aux idées principales (dimension, non-singularité, genre, différentielles, courbes et fonctions elliptiques, systeme linéaires, Riemann-Roch, plongement canonique etc.) sans démonstrations trop importantes.

Sommaire :

1. Langage naïf de la géométrie algébrique (variétés affines et projectives sur un corps algébriquement clos, Nullstellensatz, dimension (résultats d'algèbre commutative seront rappelés, pas démontrés).
2. Courbes non-singulières du point de vue algébrique et analytique, fonctions rationnelles/méromorphes, différentielles rationnelles/méromorphes et régulières/holomorphes, diviseurs, genre.
3. Courbes algébriques / surfaces de Riemann de genre 0 et 1.
4. Formulation du théorème de Riemann-Roch, plongement canonique.

Bibliographie :

1. Hartshorne, Robin. Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp.
2. Kirwan, Frances. Complex algebraic curves. London Mathematical Society Student Texts, 23. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. viii+264 pp.
3. Miranda, Rick. Algebraic curves and Riemann surfaces. Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. xxii+390 pp.
4. Reid, Miles. Undergraduate algebraic geometry. London Mathematical Society Student Texts, 12. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. viii+129 pp.
5. Shafarevich, Igor R. Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin, 1994. xx+303 pp.
6. Shafarevich, Igor R. Basic algebraic geometry. 2. Schemes and complex manifolds. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin, 1994. xiv+269 pp.

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[2]e-mail : `karpenko@math.jussieu.fr`

Daniel BERTRAND[3] : **Introduction à la Théorie algébrique des nombres**

Résumé :
Le cours d'introduction à la théorie des nombres s'appuiera sur un polycopié rédigé par Loïc Merel : http ://www.institut.math.jussieu.fr/˜mer
Seule une partie du polycopié sera couverte. Nous indiquons ci-dessous le programme du cours et les chapitres correspondants du polycopié.

1. Rappels sur la théorie de Galois et sur les corps finis (Chap. III, § 1 et 5)
2. Anneaux de valuation discrète (Chap. I)
3. Anneaux de Dedekind (Chap. II)
4. Ramification, groupes de décomposition et d'inertie, discriminant (Chap. III, § 2, 3, 4, 6 et Chap. IV)
5. Complétés, nombres p-adiques (Chap. VII, et Chap. IX, § 1)
6. Groupe des classes d'idéaux, groupe des unités, et interpretation adélique (Chap. V, § 1 à 3 ; Chap VI, § 1, 4 ; Chap. VIII, § 1 à 4))
7. Corps quadratiques, corps cyclotomiques (Chap. XII, § 1 à 6)
8. Fonctions *L*, théorème de Dirichlet (Chap. X, § 1, 2, 3 et Chap. XII, § 7).

Bibliographie :

1. J-P. Serre : Cours d'arithmétique (PUF, 1970) : Le chapitre I sur les corps finis, le chapitre II sur les corps p-adiques, le chapitre VI sur le théorème de Dirichlet.
2. J-P. Serre : Corps locaux (Hermann, 1968) : Le chapitre I sur les anneaux de valuation discrète et les anneaux de Dedekind, le chapitre II sur la complétion, le chapitre III sur les discriminants.
3. P. Samuel (Hermann, 1967) : Théorie algébrique des nombres.

   Un polycopié plus élémentaire
4. D. Bertrand : cours M1 de Théorie des Nombres (chapitres 1 à 7, 2006) est accessible sur la page
   http ://www.institut.math.jussieu.fr/˜boyer/cours.htm.

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[3]e-mail : `bertrand@math.jussieu.fr`

Patrick POLO[4] : **Introduction aux groupes et algèbres de Lie**

Le but de ce cours est d'introduire et étudier les groupes de Lie compacts et algèbres de Lie semi-simples complexes, ainsi que leurs représentations de dimension finie. Des aspects plus géométriques (espaces homogènes, etc.), sous un angle plus algébrique (groupes algébriques) seront abordés dans le cours Groupes algébriques et groupes de Lie. Le programme prévu est le suivant :

1. Groupes topologiques localement compacts, exemples de représentations discontinues, continues, unitaires. Lemme de Schur. Existence d'une mesure de Haar (admis). Toute représentation unitaire irréductible d'un groupe compact est de dimension finie.
2. Variétés différentiables, vecteurs tangents, dérivations. Groupes de Lie et algèbres de Lie, exemples de représentations continues, analytiques, holomorphes.
3. Algèbres de Lie complexes semi-simples ou résolubles, théorème de Levi-Malcev (admis), systèmes de racines. Représentations de dimension finie.
4. Groupes de Lie compacts, représentations unitaires. Groupes de Lie complexes, astuce unitaire de Weyl, représentations de dimension finie.
5. Modules de Verma, formule des caractères de Weyl.

Il y aura un polycopié (http ://www.math.jussieu.fr/˜polo/polys) dont le contenu sera puisé dans les références suivantes :

1. N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.
2. Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
3. J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
4. J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005
5. R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris 7, 1982, et Springer, 2004.
6. J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.
7. V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser, 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
8. J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[4]e-mail : `polo@math.jussieu.fr`

Pierre SCHAPIRA[5] : **Catégories, sites et champs**

Ce cours n'exige pratiquement aucune connaissance préalable, mais demande par contre une certaine familiarité avec le raisonnement abstrait.

On exposera rapidement la théorie des catégories et des limites (en abordant le problème des univers). On définira ensuite les sites (petites catégories munies de topologies de Grothendieck) en suivant la présentation de [4] et l'on étudiera les préfaisceaux et les faisceaux sur les sites et leurs opérations. On introduira alors la notion de prestack et stack (stack=champ) et en particulier les 2-limites projectives de catégories, en donnant le maximum d'exemples (faisceaux tordus, faisceaux équivariants, quantification, etc.).

Ce cours ne traitera ni l'algèbre homologique (catégories triangulées et dérivées), ni les champs algébriques.

Bibliographie :

1. J-L. Brylinski, *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization,* Progress in Math. **107**, Birkhauser (1993).
2. J. Giraud, *Cohomologie non abélienne,* Grundlehren der Math. Wiss. **179**, Springer-Verlag (1971).
3. S-G-A 4 *Préfaisceaux,* Sém. Géom. Algébrique (1963-64) by M. Artin, A. Grothendieck and J-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas,* Lecture Notes in Math. **269, 270, 305**, Springer-Verlag (1972/73).
4. M. Kashiwara and P. Schapira, *Categories and Sheaves,* Grundlehren Math. Wiss **332**, Springer-Verlag (2005)
5. G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algébriques,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge **39**, Springer-Verlag, Berlin (2000).

Voir `www.math.jussieu.fr/˜schapira/polycopies/Sta.pdf`

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[5] e-mail : `schapira@math.jussieu.fr`

COURS FONDAMENTAUX

Géométrie algébrique

Claire VOISIN[6] (+ TD Matthieu ROMAGNY[7]) : **Géométrie algébrique I**

Cours du 6 Nov. au 15 Dec. 06

Le but du cours est d'introduire les notions et outils fondamentaux de la géométrie algébrique, la motivation présente étant leur application à l'étude de la topologie et des cycles algébriques des variétés complexes.

I. Notions de base

1. Espace affine et espace projectif sur k. Proj et Spec. Schémas affines et projectifs sur k.
2. Topologie de Zariski, faisceaux cohérents. $\mathcal{O}(1)$ et théorèmes d'annulation de Serre.
3. Sous-variétés, sous-schémas, localisation, complétion formelle. Restriction des faisceaux cohérents.

II. Le point de vue complexe

1. Variétés complexes et fibrés en droites holomorphes.
2. Variétés kählériennes. Le théorème d'annulation et le théorème de plongement de Kodaira.
3. Le théorème de comparaison de Serre (principe GAGA).

III. Variétés lisses et cohomologie de de Rham.

1. Différentielles de Kähler, lissité. Sous-variétés, fibré normal, adjonction, et éclatements.
2. Complexes de de Rham algébriques et holomorphes. Dégénérescence de la suite spectrale de Frölicher. Le théorème de comparaison de Serre entre Betti et de Rham. Théorèmes d'annulation et théorèmes de Lefschetz.
3. Dualité de Serre et fonctorialité de la cohomologie de de Rham.

Bibliographie :

1. R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics 52, Springer (1977).
2. J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6, (1956) 1-42.
3. J.-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents, Ann. Math. 61, 197-278.
4. C. Voisin. Variations de structure de Hodge et zéro-cycles sur les surfaces générales, Mathematische Annalen 299, 77-103 (1994)
5. C. Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry I et II*, Cambridge University Press 2002, 2003. Version française : *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés **10**, SMF 2002

[6] e-mail : `voisin@math.jussieu.fr`
[7] e-mail : `romagny@math.jussieu.fr`

Claire VOISIN[8] (+ TD Nicolas PERRIN[9]) : **Géométrie algébrique II**

Cours du 8 Janv. au 16 Fév. 07

Dans cette seconde partie du cours, on s'intéressera plus spécifiquement aux déformations des variétés algébriques (ou, dans le cas des déformations d'ordre fini, des variétés complexes compactes). La géométrie algébrique fournit divers outils pour construire des espaces de paramètres pour ces déformations. On décrira localement et globalement ces espaces de paramètres. On présentera également l'étude des foncteurs dérivés du foncteur π_* pour π un morphisme propre.

I. Familles de variétés algébriques

1. Platitude, lissité, propreté. Complexe de de Rham relatif.
2. Etude locale des faisceaux $R^k\pi_*\mathcal{F}$. Théorème de +changement de base. Application au complexe de de Rham relatif : Connexion de Gauss-Manin et propriété de changement de base pour les $\Omega^p_{X/B}$.
3. Théorie des déformations au-dessus d'un schéma artinien. Espace tangent, obstructions. Interprétation des obstructions.

II. Schéma de Hilbert et variétés de Chow

1. Grassmanniennes. Variétés de Chow.
2. Schéma de Hilbert. Etude locale.
3. Construction. Résultats de finitude et de dénombrabilité. Quelques applications sur **C**.

III. Cycles algébriques

1. Relations d'équivalence sur les cycles algébriques. Fonctorialité. Intersection avec *Pic*.
2. Classes de Chern des faisceaux localement libres. Résolutions localement libres et classes de Chern des faisceaux cohérents sur les variétés lisses.
3. Classe de cycle. Correspondances et action induite en cohomologie. Le théorème de Mumford.

Bibliographie :

1. R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics 52, Springer (1977).
2. J. Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete 3 Folge Bd 32 (1996).
3. W. Fulton. *Intersection Theory*, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete 3 Folge Bd 2, (1984).
4. J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6, (1956) 1-42.
5. D. Mumford. Abelian varieties, Second Edition, Tata Lecture Notes, Oxford University Press, London, 1974.

[8]e-mail : `voisin@math.jussieu.fr`
[9]e-mail : `nperrin@math.jussieu.fr`

Théorie des nombres

Pierre COLMEZ[10] (+ TD Jan NEKOVÁŘ[11]) : **Nombres p-adiques et fonctions L (TN1)**

Cours du 6 Nov. au 15 Dec. 06

Contenu

1. Construction des corps Q_p et C_p des nombres p-adiques.
2. Action de $\mathrm{Gal}(\overline{Q}_p/Q_p)$ sur C_p et $2i\pi$ p-adique.
3. Théorie de l'intégration sur Z_p.
4. Fonctions zêta et L p-adique.

Prérequis : Un peu de théorie de Galois ne peut pas faire de mal, ainsi que le cours de Daniel Bertrand

Bibliographie :

1. La fonction zêta, journées X-UPS 2002, presses de l'École Polytechnique.
2. Dwork-Gerotto-Sullivan, *Introduction to G-functions*, Princeton University Press.
3. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zêta functions*, Springer-Verlag.
4. Serre, *Corps locaux*, Hermann.

Voir `www.math.jussieu.fr/~colmez/M2-2005.html`

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[10] e-mail : `colmez@math.jussieu.fr`
[11] e-mail : `nekovar@math.jussieu.fr`

Marie-France VIGNERAS[12](+ TD Pascal BOYER[13]) : **Fonctions L de formes modulaires (TN2)**

Cours du 8 Janv. au 16 Fév. 07

Résumé : Ce cours de théorie des nombres est un cours d'introduction à la théorie des fonctions L p-adiques des formes modulaires.

1. Formes modulaires
2. Operateurs de Hecke
3. Fonctions L
4. Symboles modulaires
5. Valeurs spéciales de fonctions L
6. Distributions p-adiques
7. Fonctions L p-adiques.
8. Invariant $\mathcal{L}$.

Bibliographie : Chapitre 1 d'un article de Mazur-Tate-Teitelbaum (Inventiones Mathematicae 84 (1986), pages 4-27).

Prérequis : Il est conseillé d'avoir suivi les cours de Daniel Bertrand sur la théorie des nombres et de Pierre Colmez sur les nombres p-adiques et fonctions L. Il serait aussi utile, mais pas indispensable, de suivre le début du cours de Michael Harris (Paris 7) sur les formes modulaires.
Voir `www.math.jussieu.fr/~vigneras/DEA.html`

[12]e-mail : `vigneras@math.jussieu.fr`
[13]e-mail : `boyer@math.jussieu.fr`

Théories de Lie algébriques

Patrick POLO[14](+ Nicolas PERRIN[15])$^\diamond$: **Groupes algébriques et groupes de Lie I**

Cours du 6 Nov. au 15 Dec. 06

Le but du cours est d'introduire le formalisme algébrique des groupes algébriques sur $\mathbb{C}$ et de leurs espaces espaces homogènes, puis de présenter la classification des groupes semi-simples. On essaiera aussi d'aborder la notion d'espace symétrique et d'en présenter des exemples. Ce cours prépare, entre autre, aux cours de N. Bergeron à Paris 6, et aussi à un cours de B. C. Ngo à Orsay.

Plan :

1. Groupes algébriques affines, exemples. Algèbre de Lie d'un groupe algébrique, exemples.
2. Construction des quotients G/H, théorème de Chevalley.
3. Tores, groupes résolubles, groupes unipotents. Théorèmes de Lie-Kolchin et de Borel.
4. Groupes semi-simples : exemples et énoncé de la classification en termes de systèmes de racines. Lien avec les groupes de Lie.
5. Introduction aux espaces symétriques, exemples.

Prérequis :
Le cours "Introduction aux groupes et algèbres de Lie". D'autre part, il serait profitable de suivre le début (au moins) du cours de "Géométrie riemannienne" par H. Rosenberg à Paris 7.

Il y aura un polycopié, page http ://www.math.jussieu.fr/~polo/polys.

Le contenu du polycopié sera puisé dans les références suivantes :

1. A. Borel, Linear algebraic groups (2nd edition), Springer-Verlag, 1991.
2. J. Faraut & al., Analysis and geometry on complex homogeneous domains, Birkhäuser, 2000.
3. S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, 1978, ou Amer. Math. Soc. 2001 (2ème édition).
4. J.E. Humphreys, Linear algebraic groups (2nd printing), Springer-Verlag, 1981.
5. J.C. Jantzen, Representation of algebraic groups, Academic Press, 1987, ou Amer. Math. Soc., 2003 (2ème edition).
6. T.A. Springer, Linear algebraic groups, Birkaüser, 1981 et 1998 (2ème édit.).

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[14] e-mail : polo@math.jussieu.fr
[15] e-mail : nperrin@math.jussieu.fr

Nicolas BERGERON[16] (+ TD Nicolas Bergeron) : **Groupes algébriques et groupes de Lie II**

Cours du 8 Janv. au 16 Fév. 07

Sous-groupes discrets de groupes de Lie et variétés hyperboliques

Ce cours se veut une introduction à la théorie des réseaux dans les groupes de Lie semi-simples.

1. Introduction : (G,X)-variétés et réseaux
2. Constructions géométriques de réseaux
3. Groupes arithmétiques
4. Variétés hyperboliques
5. Représentations et propriété (T)
6. On verra suivant le temps qu'il reste !

Bibliographie :

1. Vinberg : Geometry II, Encyclopedia of Math. Sc. 29 Springer (1993),
2. Borel : Introduction aux goupes arithmetiques, Hermann (1969)
3. Ratcliffe : Foundations of Hyperbolic Manifolds Graduate Texts in Math. 149 Springer-Verlag, New York, 1994.
4. Zimmer : Ergodic theory and semisimple groups, Birkhauser (1984)
5. Margulis : Discrete subgroups of semi-simple Lie groups, Springer (1991)

Prérequis : Il est conseillé d'avoir suivi les cours (d'introduction et fondamental) Patrick Polo sur les groupes de Lie et groupes algébriques.

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[16]e-mail : `bergeron@ens.fr`

COURS SPÉCIALISÉS

Géométrie algébrique

Nikita KARPENKO[17] : Cycles algébriques avec applications aux formes quadratiques

Cours du 5 Mars au 13 Avril 2007⋆

Résumé :
La théorie algébrique des formes quadratiques, c'est-à-dire la théorie des formes quadratiques sur un corps quelconque, a été fondée vers le milieu du XXème siècle. La première vague de résultats a atteint son maximum dans les années 1970. Pendant certaine période à partir de ce temps-là, on a même considéré cette théorie comme achevée. Néanmoins, une deuxième vague géante de nouveaux résultats est venue vers la fin du siècle passée. Elle est caractérisée surtout par application de méthodes et de moyens (classiques ainsi que récemment inventés) de la géométrie algébrique. On en parlera dans ce cours.

Sommaire :

1. Revue de la théorie classique des formes quadratiques.
2. Groupes de Chow, correspondances et motifs, opérations de Steenrod.
3. Variétés projectives homogènes liés aux formes quadratiques.
4. Dans la partie finale du cours, on traitera des résultats récents sur les formes quadratiques (questions d'isotropie des formes anisotropes sur extensions du corps de base, dimension maximale de formes anisotropes sur un corps fixe, dimensions des formes anisotropes de degré n, valeurs des indices de Witt supérieures etc.) et discutera des problèmes ouverts.

Prérequis : Il est conseillé d'avoir suivi les cours fondamentaux sur la géométrie algébrique : [I,II].

Bibliographie :

1. T. Y. Lam. Introduction to quadratic forms over fields. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
2. W. Scharlau. Quadratic and Hermitian forms. Springer, Berlin, 1985.
3. W. Fulton. Intersection theory. Second edition, Springer, Berlin, 1998.
4. P. Brosnan. Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 5, 1869–1903.
5. O. T. Izhboldin. Fields of u-invariant 9. Ann. of Math. (2) 154 (2001), no. 3, 529–587.
6. N. A. Karpenko. On the first Witt index of quadratic forms. Invent. Math. 153 (2003), no. 2, 455–462.

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[17] e-mail : `karpenko@math.jussieu.fr`

Théorie des Nombres

Marie-France VIGNERAS[18] : **Fonctions L et représentations p-adiques**

Cours du 5 Mars au 13 Avril 2007⋆

Résumé : Ce cours de théorie des nombres et de théorie des représentations des groupes est un cours d'introduction à la correspondance de Langlands locale p-adique pour $GL(2,Q_p)$.

1. Représentations algébriques de $GL(2)$
2. Représentations lisses de $GL(2,Q_p)$
3. Structures p-entières
4. Groupe de Galois absolu Gal_p de Q_p
5. Représentations p-adiques de Gal_p
6. (ϕ,Γ)-modules
7. Des (ϕ,Γ)-modules aux représentations p-adiques de $GL(2,Q_p)$
8. Zéros supplémentaires des fonctions L p-adiques

Bibliographie :

1. Christophe Breuil, Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale p-adique. Ann. Scient. de l'E.N.S. 37 (2004), 559-610.
2. Christophe Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $GL_2(Q_p)$. J. Institut Math. Jussieu 2 (2003), 23-58.
3. Pierre Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2. Preprint 2004.

Prérequis : Il est conseillé d'avoir suivi mon cours sur les fonctions L de formes modulaires, ainsi que les cours de Michael Harris (Paris 7) sur les formes modulaires, de Daniel Bertrand sur la théorie des nombres et de Pierre Colmez sur les nombres p-adiques et fonctions L.

[18] e-mail : `vigneras@math.jussieu.fr`

Damian RÖSSLER[19] : **Introduction à la théorie des modèles entiers des courbes**

Cours du 5 Mars au 13 Avril 2007$\star$

Résumé :
Dans ce cours, nous nous attacherons à formuler et démontrer les théorèmes principaux de la théorie des modèles entiers des courbes.

Plus précisément, soit S un schéma en anneaux de Dedekind et $C \to \mathrm{Spec}\ \kappa(S)$ une courbe projective et lisse sur son corps de fonctions. Que peut-on dire des fibrations en courbes $\widetilde{C} \to S$ dont la fibre générique est C ? Si $S = \mathrm{Spec}\ Z$, cela correspond à s'intéresser aux divers systèmes d'équations à coefficients entiers définissant des courbes isomorphes sur Q.

Sommaire :

1. Rappels sur les éclatements ; théorie de l'intersection sur les surfaces.
2. (Esquisse de la) démonstration de l'existence d'une résolution des singularités dans le cas des surfaces, d'après Lipman.
3. Démonstration de l'existence d'un modèle régulier minimal pour les courbes de genre ≥ 1 (théorème de Lichtenbaum et Shafarevitch).
4. Etudes des modèles des courbes elliptiques ; la classification de Néron-Kodaira des fibres spéciales.
5. Existence de modèle stables pour les courbes de genre ≥ 2, après extension séparable finie du corps de fonctions (théorème de Deligne-Mumford) ; notre démonstration suivra Artin-Winters.

A part pour 2., notre exposition suivra dans les grandes lignes celle du livre [3], chapitre 8 à 10, qu'il faut considérer comme le manuel de référence pour ce cours. On trouvera dans [2] une exposition de la démonstration de Lipman. Pour le point 4., on pourra aussi consulter le livre [4] et pour 5. l'article [1].

Prérequis : géométrie algébrique schématique de base (par exemple, le cours fondamental Géométrie Algébrique I).

Bibliographie :

1. Abbes, A. : Réduction semi-stable des courbes d'après Artin, Deligne, +Grothendieck, Mumford, Saito, Winters, ... *Courbes semi-stables et +groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998)*, 59–110, Progr. +Math., 187, Birkhäuser, Basel, 2000.
2. Artin, M. : Lipman's proof of resolution of singularities for surfaces. *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, 267–287, Springer, New York, 1986.
3. Liu, Q. : Algebraic geometry and arithmetic curves. Translated from the French by Reinie Erné. *Oxford Graduate Texts in +Mathematics*, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002.
4. Silverman, J.-H. Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. +*Graduate Texts in Mathematics*, 151. Springer-Verlag, New York, 1994.

[19]e-mail : `roessler@math.jussieu.fr`

Kai BEHREND, Andrew KRESCH (IHP) : **Introduction to Stacks**

Cours du 19 Févr. au 16 Mars 2007⋆

Ce cours fait partie du programme du semestre "Groupoids and Stacks in Physics and Geometry" a l'Institut Henri Poincaré (http ://www.ihp.jussieu.fr/ceb/Trimestres/T07-1/index.html). Les étudiants de M2 désirant faire valider cet enseignement à l'I.H.P. se mettront au contact avec Jan Nekovar.

Résumé : his course will give a careful introduction to the theory of algebraic stacks. The exposition will follow the draft of the early chapters of the monograph in preparation "Introduction to Stacks" by Behrend et al.

Nicolas BERGERON[20] : **Spectre des surfaces hyperboliques**

Cours du 5 Mars au 13 Avril 2007⋆
(Cours commun avec le M2 Analyse et géométrie de Paris 6)

À travers l'étude du spectre des surfaces hyperboliques (théorème spectral, formule des traces de Selberg) nous nous attacherons, dans ce cours, à illustrer les liens ténus entre la géométrie/topologie des surfaces, analyse sur ces variétés et certains problèmes de théorie des nombres. Le but sera de donner une (ou deux suivant le temps) demonstration auto-contenu d'un célèbre théorème de Selberg sur la première valeur propre du spectre des surfaces de congruence.

Bibliographie :

1. Iwaniec : Spectral methods of automorphic forms, Graduate Studies in Mathematics Vol. 53
2. Bump : Automorphic forms and representations, Cambridge university press (1997)
3. Buser : Geometry and spectra of compact riemann surfaces, Birkhauser (1992)

Prérequis : Il est conseillé d'avoir suivis les cours d'introduction d'Elisha Falbel et dans une moindre mesure celui de Daniel Bertrand. Avoir suivi un cours de théorie spectrale (opérateurs non bornés) peut aidé. J'essaierai quoiqu'il en soit, de rendre le cours auto-contenu, quitte à renvoyer aux notes que je distribuerai en cours.

Ce cours est également proposé en télé-enseignement

[20] e-mail : `bergeron@ens.fr`