La conjecture (résolue) de Poincaré : flots géométriques et applications

Fête de la Science

G. Besson

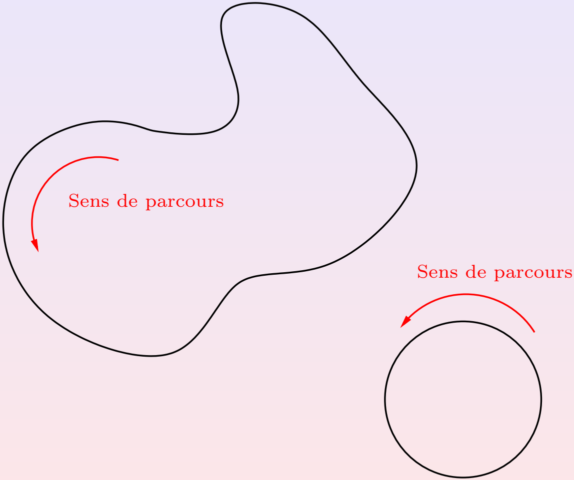
C.N.R.S.–INSTITUT FOURIER
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜besson

21 novembre 2009

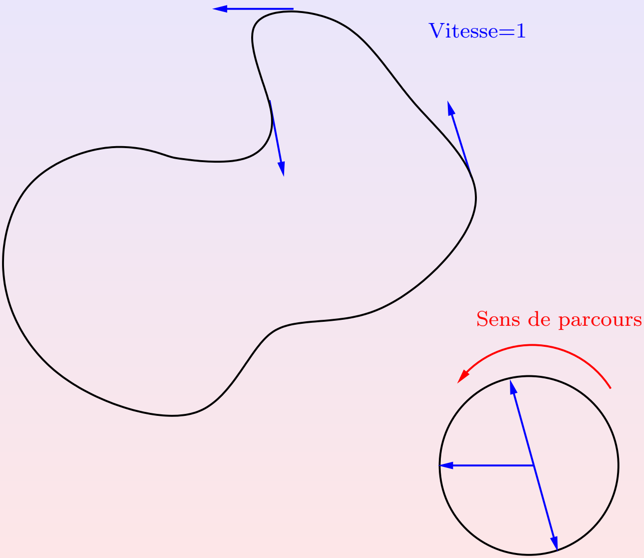
« Débruitage » d'une image

« Débruitage » d'une image

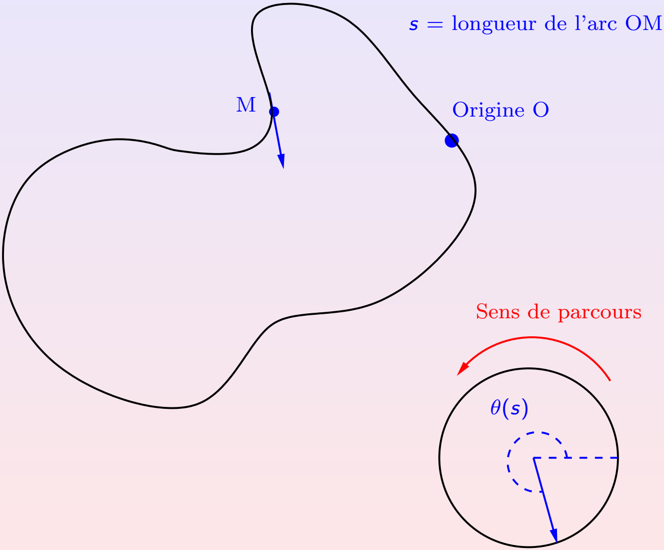
Courbe simple



Courbe simple

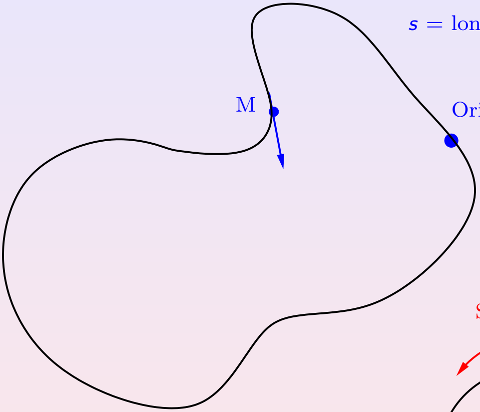


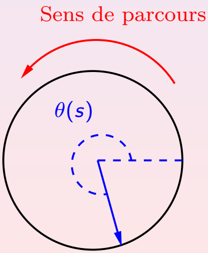
Courbe simple



Courbe simple

s = longueur de l'arc OM





$\kappa(M) = \frac{d\theta}{ds}(M)$

Raccourcissement des courbes

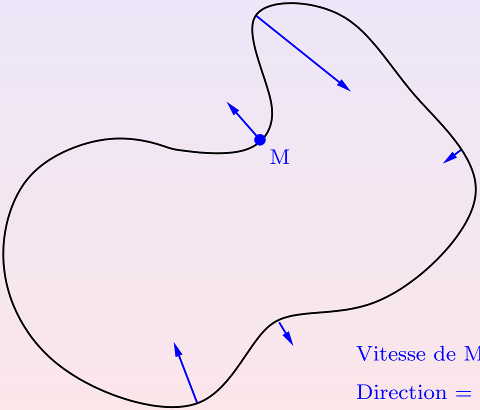
Déformation de la courbe initiale.

À un instant donné :

- Chaque point se déplace perpendiculairement à la courbe.
  dessin
- Sens de la concavité.
  dessin
- Vitesse d'un point = courbure de la courbe en ce point.
  dessin

Attention ! Durant l'évolution tout change : perpendiculaire, concavité et courbure.

Raccourcissement des courbes



Vitesse de M$=\kappa(M)$.

Direction = perpendiculaire.

Raccourcissement des courbes

Théorème (M. Gage-R. Hamilton, M. Grayson)

La courbe reste simple et converge vers un point en s'arrondissant.

Exemple : une courbe convexe

Merci à Jos Leys et Étienne Ghys

Exemple : une courbe non convexe

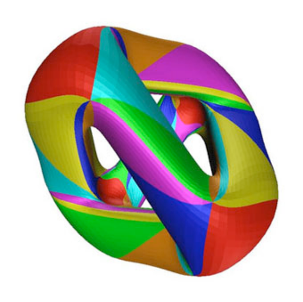
Merci à Jos Leys et Étienne Ghys

Exemple : flot normalisé

Merci à Jos Leys et Étienne Ghys

Topologie des surfaces I

Σ^2 = surface fermée (compacte sans bord, orientable) $\rightsquigarrow$ exemple :

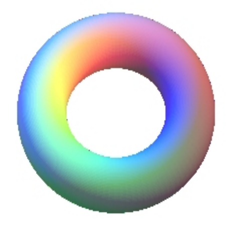


Théorème

Toute surface fermée est le bord d'un bretzel.

Topologie des surfaces II

Les briques élémentaires sont,

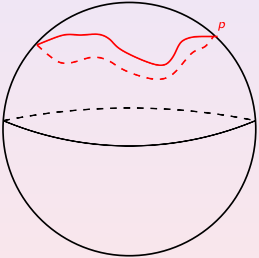


En mathématiques, un bretzel peut ne pas avoir de trou,

Topologie des surfaces III

Définition

Σ^2 est dite simplement connexe si toute courbe tracée sur elle peut se déformer sans rupture sur un point.



Théorème

La seule surface fermée simplement connexe est la sphère.

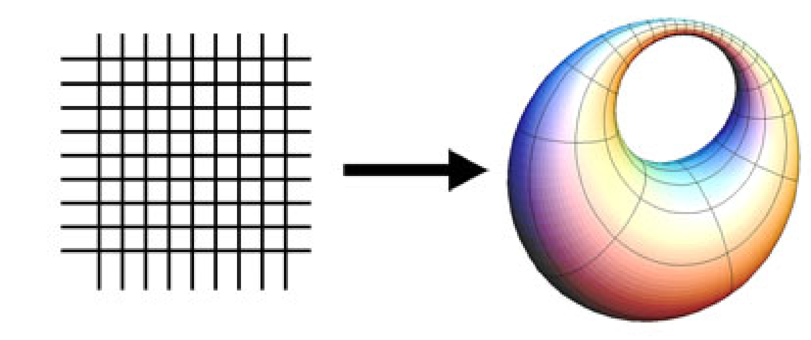
Géométrie des surfaces I

géo-métrie = mesurer la terre $\rightsquigarrow$ outils de mesure.

Théorème (Théorème d'uniformisation)

Toute surface est conforme à un des trois modèles : plat, sphérique et hyperbolique.

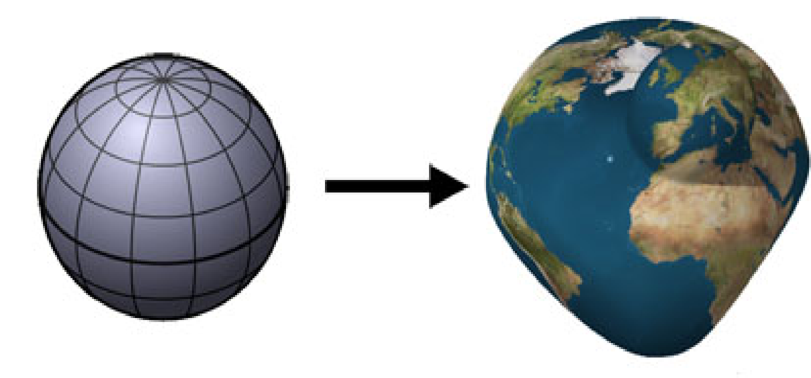
Conforme $\rightsquigarrow$ (très) localement les formes sont les mêmes.



Géométrie plane.

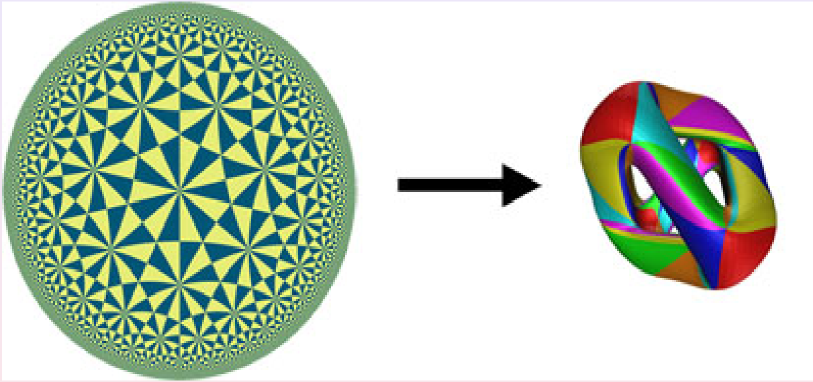
Géométrie des surfaces II

Géométrie sphérique :



Géométrie des surfaces III

Géométrie hyperbolique :



C'est le fruit du 19ème siècle : F. Gauß, J.Byolai, N. Lobatchevsky, B. Riemann, W. Von Dyck, C. Jordan, F. Klein, A. Möbius, L. Schläfli, P. Koebe, H. Poincaré.

Galerie

La conjecture de Poincaré

M^3 espace fermé à 3 dimensions.

Conjecture (Poincaré, 1904)

M^3 fermé, simplement connexe est une sphère.

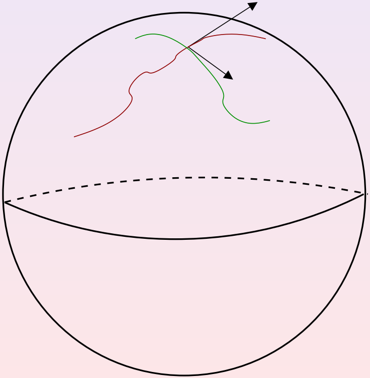
Elle a été étendue aux espaces à n dimensions,

- $n \geq 5$ prouvée par S. Smale (médaille Fields 1966).
- $n = 4$ prouvée par M. Freedman (médaille Fields 1986).
- $n = 3$ prouvée par G. Perelman (médaille Fields refusée 2006).

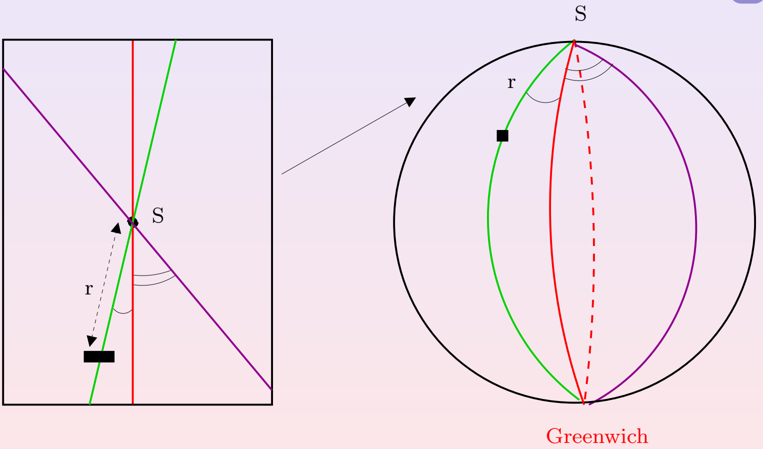
Géométrie différentielle

M^3 espace fermé à un nombre arbitraire de dimensions.

Géométrie = mesure d'angles et de longueurs des vitesses des courbes tracées sur M.



Courbure de Ricci

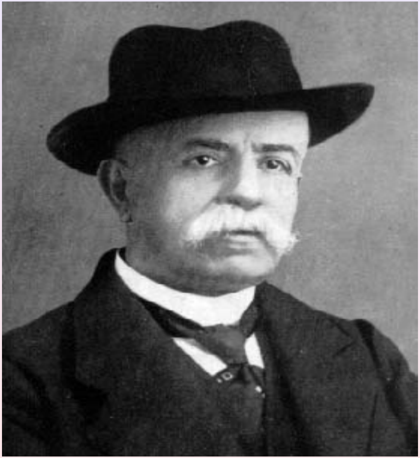


Courbure de Ricci

C= carré noir et R = rectangle noir

$$\mathrm{Aire}(C) = \mathrm{Aire}(R)(1 - \frac{r^2}{6}\mathrm{Ric}(u) + o(r^2))$$

Gregorio Ricci-Curbastro from Lugo di Romagna



Le flot de Ricci de R. Hamilton

On déforme la géométrie,

$$g_t(u) = \text{ longueur au temps } t \text{ du vecteur vitesse } u$$

Variation de la mesure de longueur = courbure.

$$\frac{dg_t}{dt}(u) = -2\mathrm{Ric}(u)$$

Inventée par Richard Hamilton et développée par Grigori Perelman.

- la forme initiale représente une répartition quelconque de chaleur sur M,
- on laisse évoluer,
- on espère atteindre une répartition uniforme $\rightsquigarrow$ géométrie sphérique.

« Débruitage » d'une image

« Débruitage » d'une image

Remerciements

- G.Besson@ujf-grenoble.fr
- Flot de Ricci : L. Bessières, G. B, M. Boileau, S. Maillot and J. Porti.
- Courbes : É. Ghys and J. Leys.
- Images : le site, http ://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html
- Débruitage : J. Sethian, http ://math.berkeley.edu/ sethian/
- Images $\rightsquigarrow$ travaux de L. Alvarez-P.L. Lions-J.M. Morel, S. Osher-J. Sethian.
- Site de la société mathématique de France.